Definición y Comportamiento de la Función Delta de Dirac desde una Perspectiva Eléctrica

Juan G. Duarte Castro
Ingeniero Electrónico, Universidad Tecnológica Metropolitana
Magister MBA
Académico Departamento de Electricidad,UTEM
jduarte@utem.cl

*"No sé qué le parezco al mundo,
pero a mi me parece que sólo he sido
como un niño jugando en la orilla del mar,
divirtiéndome ahora al encontrar una piedra
más suave o una concha más bonita de lo
normal, mientras el gran océano de la verdad
yace completamente sin descubrir ante mí"*

Sir Isaac Newton

Resumen

En los textos científicos del área de la electricidad y electrónica, las funciones singulares por lo general son tratadas de una manera no tan evidente para la comprensión del lector, que principalmente son estudiantes de estas especialidades. Teniendo esto en cuenta, se presenta el desarrollo más detallado de una de estas funciones singulares, como lo es la "función" Delta Dirac.
A partir de la función escalón es posible determinar la función Impulso Unitario o Delta de Dirac, con solo derivar el escalón y evaluar lo que sucede cuando se acerca a, tanto por la izquierda como por la derecha, encontrándose que en su valor es distinto de cero. Además, encontrar lo que sucede cuando dicha función se aplica a un condensador y a una inductancia cuya respuesta, se denomina doblete unidad.

Palabras Clave: Función Dleta Dirac, Escalón, Impulso.

Abstract

In the scientific literature in the area of electricity and electronics, the singular functions are usually treated in a not so obvious to the reader's understanding, which are mainly students in these specialties. With this in mind, we present more detailed development of these unique features, such as the "function" Dirac Delta.
Since the step function is possible to determine the unit impulse function or Dirac Delta, just bypass the step and evaluate what happens as you approach, both the left and right, finding that its value is different from zero. Also, find out what happens when this function is applied to a capacitor and an inductor whose response is called a double unit.

Keywords: Delta Dirac Function, Impulse.

1. Función Impulso Unitario

Existen sistemas tanto mecánicos como eléctricos que están sometidos a fuerzas externas (caso de sistemas mecánicos), como a tensiones eléctricas (caso de sistemas eléctricos), en ambos casos de una magnitud considerable actuando en un corto tiempo. A modo de ejemplo, se puede considerar un rayo que cae sobre un avión, una pelota (tenis, golf, etc.), en reposo que es sacada de su estado mediante el golpe de una raqueta, un pie, un bastón de golf, etc. Lo anterior se explica mediante el concepto de impulso y se modela a través de una la función impulso unitario.

A partir de la definición de la tensión en una inductancia para una corriente, cuyas ondas tienen una forma trapezoidal, la corriente es inicialmente cero, a continuación se eleva linealmente hasta un valor constante, el cual se mantiene durante un tiempo finito; cayendo finalmente de una forma lineal a cero otra vez. A medida que a través del tiempo la subida y el descenso (lineales) se aproximan a cero, se encuentra que la tensión en la bobina contiene pulsos positivos y negativos de gran amplitud y corta duración. En el límite, es decir cuando $\Delta t \to 0$, se obtienen unas "puntas" positivas y negativas que son llamadas **impulsos**.

El impulso unitario se define como una función del tiempo (1), la cual es nula cuando su argumento, generalmente $(t-t_0)$, es menor que cero y también cuando es mayor que cero, es infinita cuando su argumento es cero y su área es la unidad. Normalmente se puede representar matemáticamente los enunciados como en la ecuación (1) y (2).

$$\delta(t-t_0)=0 \qquad t \neq t_0 \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \tag{2}$$

Observando la expresión (1) resulta evidente que los límites de la integral de la ecuación (2) pueden ser cualesquiera que sean menores que t_o y mayores que t_o. Si se representan por t_0^- y t_0^+ a los valores del tiempo que están arbitrariamente próximos a la ecuación se puede representar como en (3).

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \tag{3}$$

En la mayoría de los casos se analizan circuitos en que sólo existe una discontinuidad y se escoge una escala de tiempo de modo que la operación de conmutación se presente para t=0 . En ese caso la representación puede verse en (4) con su restricción de definición para tiempos distintos de cero.

$$\delta(t)=0 \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \quad \text{ó} \quad \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1 \tag{4}$$

El impulso unitario también puede ser multiplicado por una constante, naturalmente que esto no afecta a las ecuaciones ya que el valor debe continuar siendo cero cuando el argumento es distinto de cero. Sin embargo, la multiplicación de cualquiera de las expresiones integrales por una constante muestra que el área comprendida por el impulso es igual al valor de la constante multiplicadora, esta área recibe el nombre de **intensidad del impulso**. Si el impulso se multiplica por una función del tiempo, la intensidad del impulso debe ser el valor de esta función en el instante en que el argumento del impulso es cero. Dicho de otra forma, la intensidad del impulso $e^{-1/2}\delta(t-2)$ es 0.368 y la del impulso $sen\left(5\pi t+\pi/4\right)\cdot\delta(t)$ es 0.707. Por tanto, es posible escribir las integrales (5) y (6) que expresan lo mismo en forma matemática.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0) \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0) \tag{6}$$

El símbolo gráfico para el impulso está representado en la figura 3, en que $f(t)=4\delta(t+1)-3\delta(t)$ está representado gráficamente en función del tiempo. Se acostumbra a indicar la intensidad del impulso entre paréntesis al costado del mismo, que se denomina al valor del salto en el punto de discontinuidad de su función primitiva.

$$\delta(t)=f(t^{+})-f(t^{-}) \qquad (7)$$

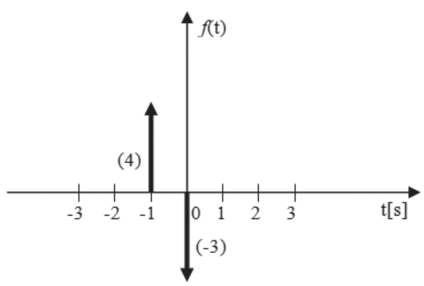


Fig.1. Impulsos positivo y negativo representados gráficamente en función del tiempo

Para lograr una mejor familiarización con otras interpretaciones del impulso unitario, se tomar formas gráficas que no tienen amplitud infinita, pero que se aproximarán al impulso según aumenta su amplitud.

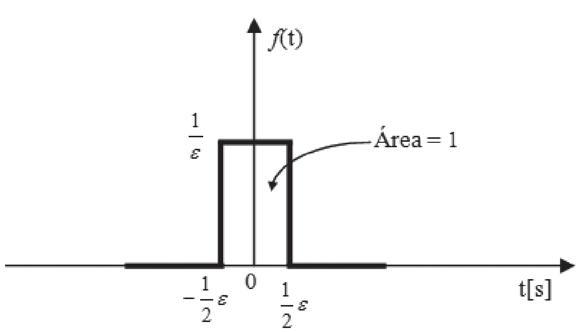


Fig.2. Pulso rectangular de área unidad, que se aproxima al impulso unidad cuando ε→0

Se escoge un ancho de pulso (fig. 2), de **ε** segundos y una amplitud de 1/**ε**, logrando un área unitaria del pulso, independiente de la magnitud de **ε**. Si **ε** aumenta, 1/**ε** disminuye y el pulso rectangular llega a ser una aproximación mejor a un impulso unitario.

La respuesta de un elemento de circuito a un impulso unitario puede ser determinada encontrando su respuesta a este pulso rectangular y a continuación haciendo que **ε** se aproxime a cero. Por otro lado, dado que la respuesta al impulso se encuentra fácilmente, se comprende también que esta respuesta puede ser en sí una aproximación aceptable a la respuesta producida por un pulso rectangular corto.

Un pulso triangular, como el de la figura 5, se puede utilizar también como una aproximación al impulso unitario. Dado que se sigue considerando el área unidad, un pulso de amplitud 1/**ε** debe tener un ancho total de 2**ε** segundos.

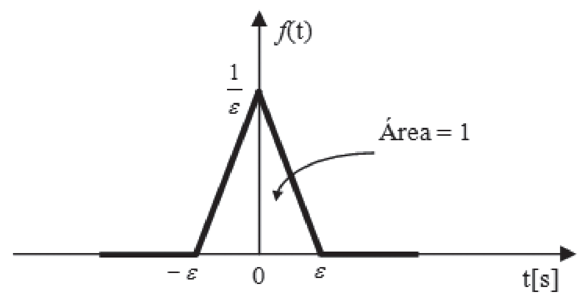


Fig. 3 Pulso triangular de área unidad, que se aproxima al impulso unidad cuando ε→0

Según **ε** se acerca a cero, el pulso triangular se acerca al impulso unidad. Existen otras formas de pulso las cuales, en el límite, se aproximan al impulso unitario, pero se considerará de ellas, la forma exponencial negativa. Primero se construye una onda exponencial decreciente (8), en que el área determinada por ésta, debe ser uno (10).

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ Ae^{-t/\tau} & t>0\end{cases} \quad \text{o bien,} \quad (8)$$

$$f(t)=Ae^{-t/\tau}u(t) \qquad (9)$$

$$Area=\int_0^{\infty} Ae^{-t/\tau}dt=-\tau Ae^{-t/\tau}\Big|_0^{\infty}=\tau A \qquad (10)$$

Por tanto, para que el área sea igual a 1, se debe hacer:

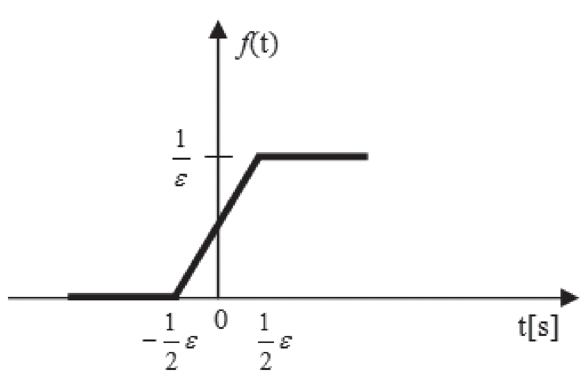
$$A = 1/\tau$$

La constante de tiempo **τ**, será muy corta por lo que se utilizará nuevamente **ε** para indicar este tiempo infinitamente pequeño. Luego, la función exponencial queda determinada por (11) y se aproxima al impulso unitario cuando $\varepsilon \to 0$.

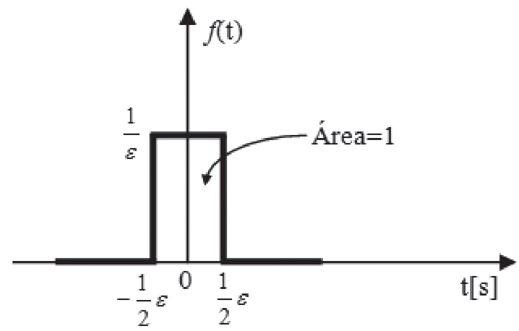
$$f(t) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-t/\varepsilon} u(t) \qquad (11)$$

Esta representación del impulso unitario, dice que el decrecimiento exponencial de una corriente o tensión en un circuito se aproxima a un impulso (no necesariamente a un impulso unitario), según se reduce la constante de tiempo.

Para esta interpretación final del impulso unitario, se tratará de establecer una relación con la función escalón unidad. En la figura 4(a), se tiene casi un escalón unidad, sin embargo, se necesitan **ε** segundos para completar la variación lineal desde cero hasta la amplitud unidad. Al lado de esta función escalón unidad modificada, la figura 4(b) muestra su derivada, puesto que la parte lineal del escalón modificado sube a razón de una unidad cada **ε** segundos, la derivada debe ser un pulso rectangular de amplitud 1/**ε** y ancho **ε**.



(a)



(b)

Fig. 4

a. Función escalón unidad modificada, la transición desde cero a la unidad es lineal en un intevalo de ε segundos.

b. Derivada del escalón unidad modificado. Cuando $\varepsilon \to 0$, (a) se convierte en el escalón unidad y (b) se acerca al impulso unidad.

Esta derivada coincide con la primera función que se ha considerado como una aproximación al impulso unitario y se sabe que tiende a él cuando ε tiende a cero. Pero el escalón unidad modificado se aproxima al escalón unidad perfecto según **ε** tiende a cero, de lo que se concluye que el impulso unitario se puede considerar como la derivada de la función escalón unidad respecto al tiempo (12) e inversamente en (13) se puede apreciar que la integral respecto al tiempo del impulso unitario corresponde a la función es calón unidad.

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad (12)$$

$$u(t) = \int_0^t \delta(t)dt \qquad (13)$$

En que el límite inferior puede ser, en general, cualquier valor de t inferior a cero.

2. Impulso unitario como impulso de corriente

El impulso unitario es un tipo de función que posee una característica que se debe conocer antes de poder aplicarlo con propiedad al análisis de circuitos. Teniendo en cuenta que, la función escalón unidad es una función del tiempo adimensional, el impulso unitario posee la dimensión de $|T^{-1}|$, lleva aparejada la unidad "por segundo".

Por otro lado, si I_o es una corriente, $I_o u(t)$ es un escalón de corriente y se mide en amperes, sin embargo, $I_o\delta(t)$ se mide en [amperes / segundo].

Se tratará de establecer una interpretación más clara del impulso de corriente utilizando como aproximación, el pulso rectangular corto de corriente. Un pulso rectangular de corriente con una amplitud de I_o [amperes] y una duración de ε [segundos] posee un área de I_o ε [amperes·segundos] o I_o ε [coulombios]. Luego, dicho pulso de corriente representa una carga total de I_o ε [coulombios] fluyendo de una manera uniforme, durante un tiempo de ε .[segundos]. Considerando la carga, en lugar de la corriente y haciendo $Q_o=I_o\varepsilon$, se puede obtener la amplitud del pulso como Q_o/ε [amperes]. Ahora, según ε disminuye, en el límite, el pulso rectangular se acerca a un impulso. Las áreas del pulso y del impulso deben ser iguales y el impulso debe tener un área, o intensidad, de Q_o [coulombios]. Por tanto, el pulso rectangular de corriente (14), puede representar un impulso de corriente en (15) y la carga que este contiene en (16).

$$i(t) = I_0 u(t) - I_0 u(t-\varepsilon) \qquad (14)$$

$$i(t) = Q_0 \delta(t) \qquad (15)$$

Son equivalentes cuando $\varepsilon \to 0$ si

$$Q_0 = I_0 \varepsilon \qquad (16)$$

En otras palabras, la amplitud I_o del pulso rectangular de corriente se acerca a infinito y su duración se acerca a cero, mientras que el producto $Q_o=I_o\varepsilon$ permanece constante.

Es importante destacar, el impulso de corriente en términos de la cantidad finita de carga que representa, particularmente cuando el impulso de corriente se aplica a un condensador.

Un impulso de corriente (15) representa una cantidad de carga y el valor de ésta, es exactamente igual a la intensidad del impulso de corriente. La aplicación de dicho impulso a un condensador producirá la brusca carga de éste, el establecimiento instantáneo de una energía almacenada en el interior del mismo y la aparición inmediata a través de él de una tensión equivalente. Si se envía un impulso de corriente (15) a través de un condensador C, se puede determinar la tensión en él empleando la relación general entre la tensión y la corriente (17).

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v(t_0) \qquad (17)$$

Suponiendo que el condensador, en $t=0$ no tiene carga, se tiene $v(t_0)=0$. Por tanto, utilizando (15) en (171) se obtiene el voltaje del condensador (18) en relación a la carga en la función impulso.

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} Q_0\delta(t)dt$$

$$v(t) = \frac{Q_0}{C}\int_{t_0}^{t} \delta(t)dt \qquad (18)$$

Siendo $t_0 < 0$

Pero, $\delta(t)$ es cero para , $t<0$ luego:

$$v(t) = 0 \qquad t<0$$

Y la tensión para $t > 0$ se obtiene de (20) utilizando la relación de (13).

$$v(t) = \frac{Q_0}{C} \qquad t > 0 \qquad (19)$$

La tensión en ambos intervalos se puede expresar entonces a partir de (13) en la relación de tensión (20).

$$v(t) = \frac{Q_0}{C} u(t) \qquad (20)$$

En la figura 5 se muestra la fuente de impulso e inmediatamente a continuación en la parte inferior se muestra el escalón de respuesta.

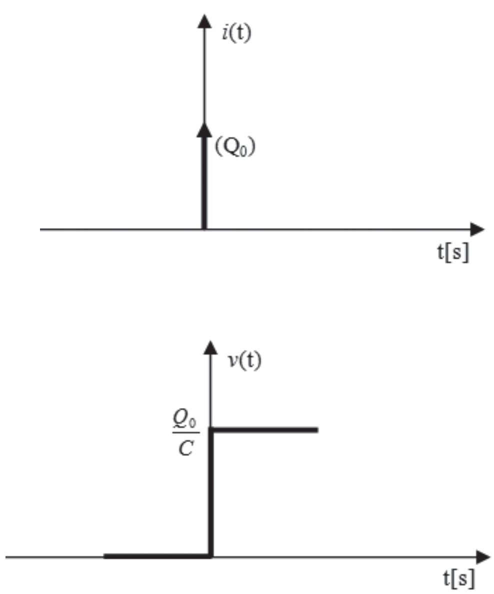


Fig. 5 La aplicación del impulso de corriente i(t) = Q_o δ(t) a un condensador C, produce una respuesta de tensión v(t) = (Qo /C)u(t)

La tensión del condensador varía de una manera discontinua desde cero, valor anterior a t=0 , a un valor constante después de t=0 , en el intervalo entre t=0- A t=0+ se ha almacenado energía en el condensador.

Se puede comprobar este resultado en la tensión del condensador, utilizando relaciones diferenciales en lugar de integrales. Así, la aplicación del impulso de corriente (15) y la definición de capacidad (21) permite escribir la relación (22).

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$Q_0\delta(t) = C\frac{dv}{dt} \qquad \text{ó} \qquad \frac{Q_0}{C}\delta(t) = \frac{dv}{dt} \qquad (22)$$

Finalmente, se debe reconocer que la interpretación del impulso de corriente como un paquete de cargas puede señalar el camino más satisfactorio para la obtención de la respuesta.

La carga y la tensión del condensador son directamente proporcionales (23) y la carga Q_o , representada por el impulso de corriente (15) crea, por tanto, una tensión Q_0/C después que el impulso de corriente ha actuado.

$$q(t) = C \cdot v(t) \qquad (23)$$

Ahora si se analiza la tensión que resulta cuando un impulso de corriente se aplica a una bobina L, fundamentado en el comportamiento de la inductancia (24), y utilizando el impulso de corriente (15), se obtiene la relación de tensión en la bobina (25) en función de la carga del impulso.

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \qquad (24)$$

$$v(t) = LQ_0\frac{d}{dt}[\delta(t)] \qquad (25)$$

La tensión en la bobina tiene la forma de la derivada del impulso unitario con respecto al tiempo, ésta es otra función singular, pero no es tan importante como el escalón unidad o el impulso unitario (26). Se define el **doblete unidad d(t).**

$$d(t)=\frac{d}{dt}[\delta(t)] \qquad (26)$$

Apartir de (26) se puede observar que se puede aproximar a un pulso rectangular, corto y positivo seguido por un pulso idéntico y negativo. Es decir, si el impulso unidad se considera como el límite de un pulso triangular de 2ε de base y $1/\varepsilon$ de amplitud, cuando $\varepsilon\to 0$, entonces el doblete unidad es el límite de un pulso rectangular positivo de ancho ε y amplitud $1/\varepsilon^2$ seguido inmediatamente de un pulso rectangular negativo de ancho ε y amplitud $-1/\varepsilon^2$, cuando $\varepsilon\to 0$ En el límite, el área de cada pulso es infinita.

El símbolo gráfico de un doblete está representado en la figura 8; la intensidad del doblete es por definición la misma del impulso, representada por la derivada de éste y esta intensidad, también se representa entre paréntesis al lado del símbolo.

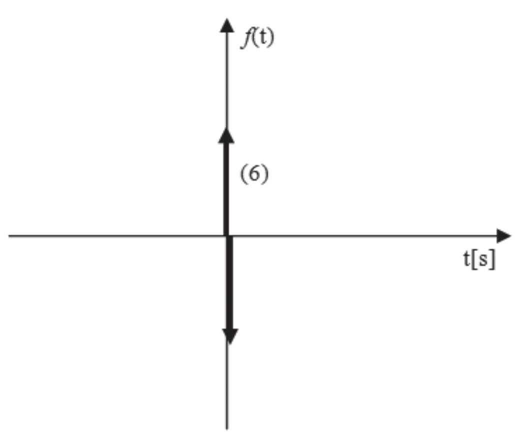


Fig. 8. El doblete i(t) = 6d(t) está representado como una función simbólica del tiempo. La intensidad de este doblete es 6.

3. Impulso de tensión

Aprovechando la dualidad que existe entre condensador y la inductancia, se interpretará el impulso de tensión considerando la aplicación del impulso de corriente al condensador. Puesto que el impulso de corriente produce en el condensador, un cambio brusco de energía y en de tensión, es de esperar que el impulso de tensión produzca también, un cambio brusco en la energía y en la corriente de una bobina.

El dual de la carga es el flujo electrodinámico, dado que en una bobina la energía se almacena en su campo magnético, la aplicación de un impulso de tensión a una bobina puede concebirse como la creación instantánea de un cierto flujo electrodinámico. Puesto que la carga de un condensador (23) el dual de la carga se obtiene reemplazando C por L y *v(t)* por *i(t)*, luego si se define el flujo electrodinámico como en (27) podría representarse el impulso de tensión en la bobina (28).

$$\lambda = Li\,(t) \qquad (27)$$

Se usará el símbolo λ (lambda) para el flujo electrodinámico, sus dimensiones son [volts·segundos] o [webers] o [webers·número de vueltas].

$$v(t)=\lambda_0\delta(t) \qquad (28)$$

Aplicando este impulso de tensión a una bobina L, la corriente resultante es representada por la ecuación (29).

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(t)dt+i(t_0)=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}\lambda_0\delta(t)dt+i(t_0) \qquad (29)$$

Si t_0 se escoge anterior al instante cero se tiene que $i(t_0)=0$, y

$$i(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{\lambda_0}{L} & t>0\end{cases}$$

o dicho de otra forma:

$$i(t) = \frac{\lambda_0}{L} u(t) \qquad (30)$$

Por tanto, el impulso de tensión es capaz de producir un cambio brusco en la corriente de la bobina (30). El valor de este cambio viene dado por la intensidad del impulso dividido por la inductancia.

Luego utilizando las condiciones de dualidad, cuando un impulso de tensión (31) se aplica a un condensador C, se obtiene un doblete de corriente (32), de la misma forma que en (26).

$$v(t) = \lambda_0 \delta(t) \qquad (31)$$

$$i(t) = C \frac{av}{dt}$$

Por tanto:

$$i(t) = C\lambda_0 d(t) \qquad (32)$$

4. Conclusiones

Teniendo en cuenta que la función "Delta de Dirac" no es una función como las conocidas habitualmente, sino que es lo que se conoce como funciones generalizadas o distribuciones para la que existen las nociones de integral y derivada, es que tras realizar un análisis de ella, no se puede dejar de mencionar que se manifiesta en muchas de las aplicaciones con las que se encuentran los estudiantes de Electrónica y Electricidad, al realizar en un circuito o en un sistema, una conmutación, ya sea en tensión o en frecuencia, convirtiéndose en lo que se denomina generalmente comocambiuo de referencias o respuestas al escalón, condiderandose parte del sistema y no perturbaciones no deseadas.

Esto trae como consecuencia el mal funcionamiento de sistemas o produciendo fallas de relevancia en estos, debido a sobre tensiones o sobre corrientes que deben soportar los dispositivos semiconductores de los sitemas.

Bibliografía

1. Hayt William; Kemmerly Jack Análisis de Circuitos en Ingeniería, 3ª ed. 1997 México, Mc. Graw Hill , 1993 706p

2. Brenner Egon Javid Mansour Análisis de Circuitos Eléctricos New York, Mc. Graw Hill , 1966. 715p